

## XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2021. december 4.

### 8. évfolyam

1. Andor és Bella egy osztályba járnak és a következőket állítják.

Andor: Ötször annyi lány osztálytársam van, mint fiú.

Bella: Osztálytársaim között négyszer annyi a lány, mint a fiú.

Hányan járnak az osztályba?

2. Tükrözzük az  $ABCD$  téglalapot a  $BD$  átlójára. A tükrözés után  $AC' = AD = BC'$ , ahol  $C'$  a  $C$  pont tükörképe. Határozd meg a téglalap területének nagyságát, ha ismert, hogy  $AB = 4\sqrt{3}$  cm hosszú!

3. Egy bűvész kalapjában 11 fehér és 22 szürke nyuszi van. A színpadon van még egy egész kosár szürke nyuszi. A mutatvány lényege, hogy a bűvész kettesével húzgálja ki a nyuszikat a kalapból (nem néz a kalapba). A következő 3 eset lehetséges:

a) ha mindkettő nyuszi szürke, akkor az egyiket visszateszi a kalapba, a másikat futni hagyja a színpadon;

b) ha a két nyuszi különböző színű, akkor a fehér nyuszi megy vissza a kalapba, a szürke futkározhat;

c) ha két fehér nyuszt húzott ki, akkor mindkettőt elengedi a színpadon és helyettük betesz egy szürke nyuszt.

Addig folytatja a nyuszik kihúzását, míg a kalapban csak egy nyuszi marad (minden húzás után eggyel kevesebb nyuszi lesz a kalapban, ezért ez biztosan bekövetkezik). Ha ügyes vagy, te már tudod, hogy ez az utolsó nyuszi milyen színű.

Írd le a választ és indokold is!

4. Egy 30 feladatból álló tesztversenyen a helyes válaszáért 5 pont jár, a rossz válaszáért pedig 2 pontot levonnak. Ha valaki nem válaszol egy kérdésre, akkor arra 0 pontot kap. A verseny első helyezettje 109 pontot ért el. Hány kérdésre nem válaszolt a győztes?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

*Jó munkát!*

## XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 8. évfolyam

**1. Andor és Bella egy osztályba járnak és a következőket állítják.**

**Andor:** Ötször annyi lány osztálytársam van, mint fiú.

**Bella:** Osztálytársaim között négyszer annyi a lány, mint a fiú.

**Hányan járnak az osztályba?**

**Megoldás:** Legyen  $l$  a lányok,  $f$  pedig a fiúk száma.

Andor állítása alapján felírható az  $5(f-1)=l$  egyenlet. Bella állítása alapján pedig az  $l-1=4f$  egyenlet. Oldjuk meg az egyenletrendszert.

$$5f - l = 5$$

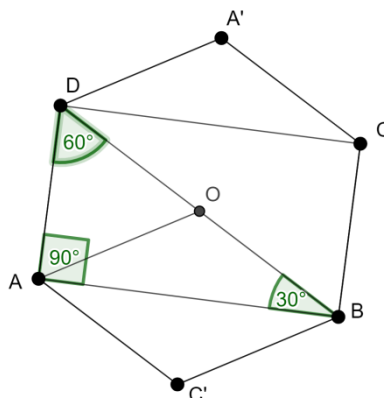
$$\underline{-4f + l = 1}$$

Összeadva a két egyenletet adódik, hogy  $f = 6$ . Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy  $-24 + l = 1$ , azaz  $l = 25$ .

A kapott egyenletrendszernek tehát egy megoldása van. A fiúk száma 6, a lányoké 25, azaz 31 tanuló jár az osztályba.

**2. Tükrözzük az  $ABCD$  téglalapot a  $BD$  átlójára. A tükrözés után  $AC' = AD = BC'$ , ahol  $C'$  a  $C$  pont tükörképe. Határozd meg a téglalap területének nagyságát, ha ismert, hogy  $AB = 4\sqrt{3}$  cm hosszú!**

**Megoldás:** A tükrözés után egy szabályos hatszöget kapunk, mivel a tükrözött csúcsok is a téglalap körülírt körére esnek, valamint adott, hogy az oldalai egyenlő hosszúságúak. A szabályos hatszög rövidebb átlója adott:  $AB = 4\sqrt{3}$  cm. Az  $ABD$  háromszög szögei:  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  és  $90^\circ$ . A félszabályos háromszögek tulajdonságainak felhasználásával könnyen kiszámolható, hogy a téglalap rövidebb oldala  $AD = 4$  cm. A téglalap területe tehát:  $T = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.



**3. Egy bűvész kalapjában 11 fehér és 22 szürke nyuszi van. A színpadon van még egy egész kosár szürke nyuszi. A mutatvány lényege, hogy a bűvész kettesével húzgálja ki a nyuszikat a kalapból (nem néz a kalapba). A következő 3 eset lehetséges:**

**a) ha mindkettő nyuszi szürke, akkor az egyiket visszateszi a kalapba, a másikat futni hagyja a színpadon;**

**b) ha a két nyuszi különböző színű, akkor a fehér nyuszi megy vissza a kalapba, a szürke futkározhat;**

**c) ha két fehér nyuszt húzott ki, akkor mindkettőt elengedi a színpadon és helyettük betesz egy szürke nyuszt.**

**Addig folytatja a nyuszik kihúzását, míg a kalapban csak egy nyuszi marad (minden húzás után eggyel kevesebb nyuszi lesz a kalapban, ezért ez biztosan bekövetkezik). Ha ügyes vagy, te már tudod, hogy ez az utolsó nyuszi milyen színű.**

**Írd le a választ és indokold is!**

**Megoldás:** A válasz: fehér.

A leírt szabály szerint a szürke nyuszik száma a kalapban minden lépésben eggyel változik: vagy csökken, vagy növekszik. A fehér nyuszik száma viszont a. és b. alatt leírt esetekben nem változik, a c. alatti esetben viszont kettővel csökken. Tehát a fehér nyuszik számának párossága nem változik. Mivel kezdetben 11 (páratlan számú) nyuszi van a kalapban, a fehér nyuszik száma a mutatvány során a következőképpen alakulhat: eleinte 11 fehér nyuszi, aztán 9, 7, 5, 3...

Tehát ha páratlan számú nyuszi van a kalapban, akkor biztosak lehetünk abban, hogy páratlan számú fehér és páros számú szürke van benne. Innen következik, hogy egy nyuszi esetén fehér nyusziról van szó.

**4. Egy 30 feladatból álló tesztversenyen a helyes válaszáért 5 pont jár, a rossz válaszáért pedig 2 pontot levonnak. Ha valaki nem válaszol egy kérdésre, akkor arra 0 pontot kap. A verseny első helyezettje 109 pontot ért el. Hány kérdésre nem válaszolt a győztes?**

**Megoldás:** Mivel  $109 = 5 \cdot 21 + 4$ , ezért a jó válaszok száma legalább 22. A rossz válaszok száma így legfeljebb 8 lehet, vagyis 16 pontnál többet nem vonhattak le.

Mivel  $150 - 16 = 134 = 5 \cdot 26 + 4$ , a helyes válaszok száma nem lehet több 26-nál.

A jó válaszok száma páratlan szám kell, hogy legyen, mivel páros számot kivonva a végső pontszám páratlan.

Igy két lehetőségünk maradt:

1) A jó válaszok száma 23.

Ekkor a rossz válaszok száma  $\frac{23 \cdot 5 - 109}{2} = 3$ , és 4 kérdésre nem válaszolt.

2) A jó válaszok száma 25.

Ekkor a rossz válaszok száma  $\frac{25 \cdot 5 - 109}{2} = 8$ , ami lehetetlen, hiszen a jó és rossz válaszok

számának összege legfeljebb 30 lehet.

A verseny győztese tehát 4 kérdésre nem válaszolt.